人工知能特論： 講義概要と制約充足問題　　第 1 回

奥乃 博 (okuno@i.kyoto-u.ac.jp)
OHP： http://winnie.kuis.kyoto-u.ac.jp/~okuno/Lecture/AI/

1. 充足可能性 (Satisfiability, SAT)
2. 制約充足問題 (Constraint Satisfaction Problem, CSP)
3. DIMACS (dimacs.rutgers.edu) の SAT/CSP 問題
4. 課題の報告と議論 (ここでも点をつけます)

☆ 【参考書】 西田 豊明 著『人工知能の基礎』, 丸善, 1999.
第 3 章「制約充足」 (pp.41–64)

☆ 【参考書】 石塚 満 著『知識の表現と高速推論』, 丸善
第 5.1 章「制約充足問題」 (pp.103–114), 1996.

講義・演習予定

4/18 講義の概要と予備知識. 充足可能性 (SAT)
4/25 David-Putnum 法と GSAT
5/2 演習 (休講)
　課題 (1)： Davis-Putnum 法 及び GSAT
5/9 課題発表. 局所整合性 (Local Consistency)
5/16 局所整合性 (Local Consistency)
5/23 後ろ戻り (Backtracking) 探索アルゴリズム
5/30 後ろ戻り (Backtracking) 探索アルゴリズム
6/6 演習 (休講)
　課題 (2)： 局所整合性あるいは後ろ戻り探索アルゴリズム
6/13 課題発表. 問題解決システムと推論エンジン
6/19 真偽維持システム
6/26 真偽維持システム
7/4 課題発表

充足可能性 (SAT)

- 命題変数集合 V 上の節集合 Σ (式, formula)
  - [　　] は $true$ (1) か $false$ (0) が割当て
  - [　　] は変数かその否定
  - [　　] はリテラルの [　　]
- [　　] : Σ 中のすべての節 (式) を満足するような, V 中の変数に対する真偽値割当てはあるか？

1. $\Sigma = \{\{x_1, \neg x_2, \neg x_4\}, \{\neg x_1, x_3, \neg x_4\}, \{x_2, \neg x_3, x_4\}, \{\neg x_2, \neg x_3\}\}$

   $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$

2. $\Sigma = \{\neg x_1, x_3, x_4\}, \{\neg x_1, \neg x_3\}, \{x_1, \neg x_2\}, \{x_3, \neg x_4\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}\}$

   $F = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_4)$

SAT の平均的解析

- SAT は [　　]

$\Longrightarrow$ 解を見つけれなくても我慢する？

$\Longrightarrow$ 最悪の場合の解析は不適切では？平均的な計算量は？

- Goldeberg の実験： SAT は 平均的には [　　]
- 「平均的な場合」の計算量： [　　] が重要.

  Goldeberg の実験：易しい問題に分布が偏っていた.
- 2 つのモデル
  1. [　　]
  2. [　　]

定数密度モデル (Constant Density Model)

- [　　] — N 変数上の M 個の節
- 各節の作り方 — 変数を確率 P で含み，正負の確率は 50%. ただし，空節 (empty clause) や単一節 (unit clause) は含まない.
- ランダム P-SAT 問題の大部分は，理論解析および実験から計算量的にやさしいことが分かっている.

固定節長モデル (Fixed Clause Length Model)

- [　　] — N 変数上の M 個の節，各節は，K 個だけのリテラルだけを含む.
- 各節の作り方 — N 個の変数から K 個の異なる変数をランダムに選ぶ. 正負の確率は 50%.
- 3-SAT (3-Satisfiability problem)
  - すべての K-SAT は 3-SAT に変換できる.
  - 1971 に [　　] が [　　] であることが直接証明.

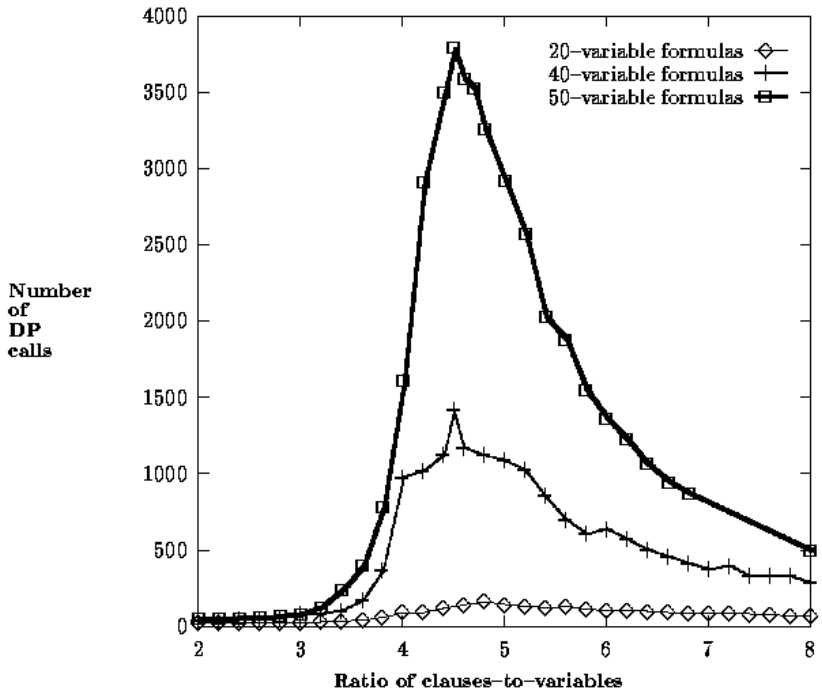
Davis-Putnum 法 — function $\mathrm{DP}(\Sigma, V)$

1. [　　]： トートロジーを含む節を除去
2. Σ が空集合なら，[　　]
3. Σ が空節を含むと，[　　]
4. [　　]： Σ が単一節を含むと，そのリテラルの真偽値を決め，Σ 中の各節を簡略化し，DP を適用.
5. [　　]： リテラル L が純粋 (Σ 中のどの節にも $\neg L$ が現れない) なら，そのリテラルを含む節を Σ からすべて除き，DP を適用.
6. [　　]： V 中の値の定まっていない変数の 1 つを v とすると，**return** $\mathrm{DP}(\Sigma \cup \{v\}, V)$ **or** $\mathrm{DP}(\Sigma \cup \{\neg v\}, V)$

Davis-Putum 法の例

$V = \{x, y, z\}$　　$\Sigma = \{\{\neg x, y, z\}, \{\neg x, \neg y, z\}, \{\neg x, \neg z\}\}$

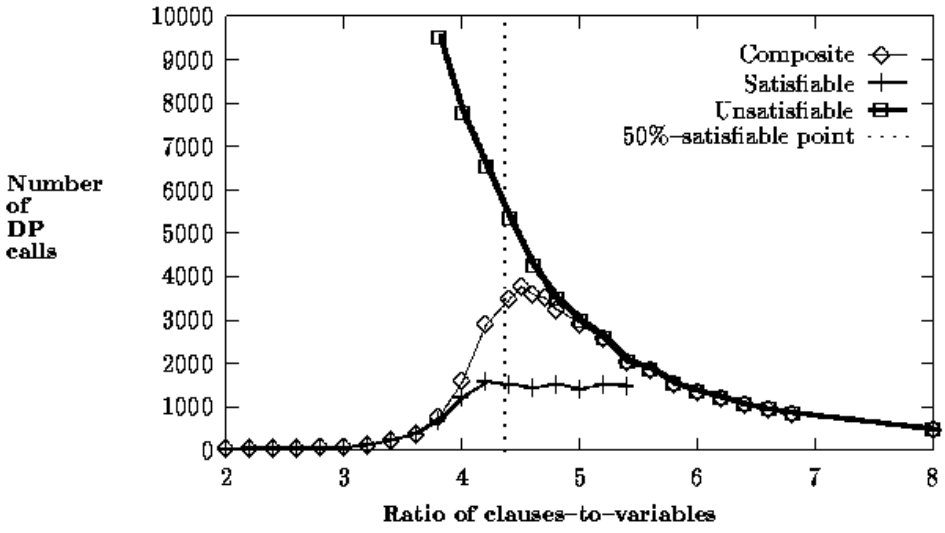
ランダム 3-SAT に対する DP 呼び出しの回数 (中間値)



「節中の変数の平均個数」で測った DP 呼び出し回数

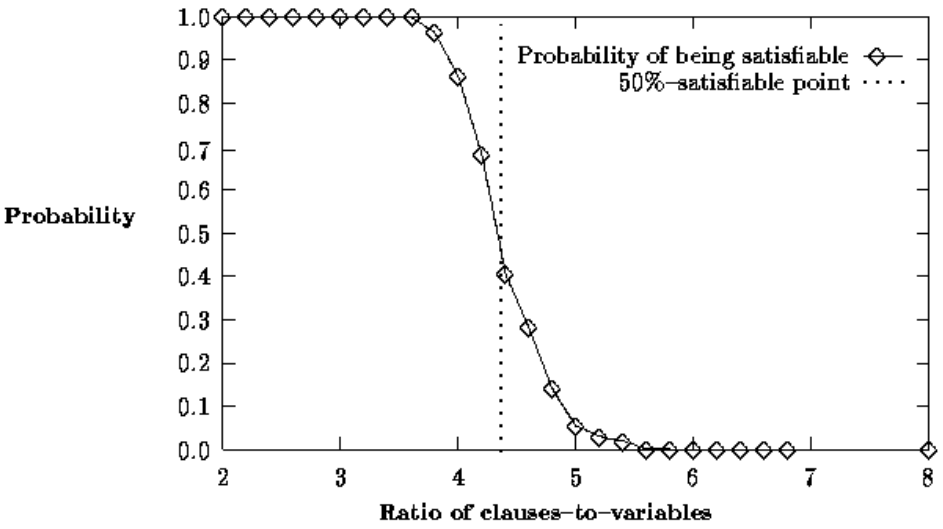
50 変数の場合のデータを充足性の側面から整理してみると

1. 充足可能な場合.
2. 充足不能な場合



DP 呼び出しの回数のピーク

充足可能性の状態遷移



1. 「節中の変数の平均個数」が 4 ~ 5 で，充足可能から充足不能へと急激に変化する．
2. 「節中の変数の平均個数」が 4.3 で 50% 充足可能

参考文献

http://winnie.kuis.kyoto-u.ac.jp/~okuno/Lecture/AI/ にあり．

1. Selman, B., *et al*: A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems. *Proc. of AAAI-92*.
2. Selman, B., *et al*: Generating Hard Satisfiability Problems. *Artificial Intelligence* 81, 17–29. (学科図書館)
3. http://www.dimacs.rutgers.edu/
4. ftp://ftp.research.att.com/dist/ai/