

### 1. Davis-Putum 法の洗練化

### 2. **課題 1** 締切 5 月 9 日 (水) 8:45.

一部の方に発表をお願いします (求む発表者).

### 3. GSAT (Greedy SAT)

### 4. **課題 2** 締切 5 月 23 日 (水) 8:45.

一部の方に発表をお願いします (求む発表者).

5. プログラムリストを提出すること.

6. 考察を必ず書くこと .

7. **gnuplot** や Excel などを使って, グラフで結果を表示.

## Davis-Putnum 法 — function $DP(\Sigma, V)$

1. **トートロジー規則**： トートロジーを含む節を除去
2.  $\Sigma$  が空集合なら, **充足可能** (*satisfiable*)
3.  $\Sigma$  が空節を含むと, **充足不能** (*unsatisfiable*)
4. **単一節伝播**：  $\Sigma$  が単一節を含むと, そのリテラルの真偽値を決め,  $\Sigma$  中の各節を簡略化し, DP を適用.
5. **純粹リテラル規則**： リテラル  $L$  が純粹 ( $\Sigma$  中のどの節にも  $\neg L$  が現れない) なら, そのリテラルを含む節を  $\Sigma$  からすべて除き, DP を適用.
6. **分割規則**：  $V$  中の値の定まっていない変数の 1 つを  $v$  とすると, **return**  $DP(\Sigma \cup \{v\}, V)$  **or**  $DP(\Sigma \cup \{\neg v\}, V)$

## 分割規則での変数選択ヒューリスティクス

**Key Idea** 単一節伝播 (*Unit propagation*, 「1リテラル規則」のこと) をできるだけ多く引き起こすような変数を優先する.

1. 変数を *true* にしたときに生じる単一節伝播の数と, *false* にしたときに生じる単一節伝播の数を見積もる.
2. この2つの見積り値を組み合わせてその変数のスコアとする.
3. スコア最大の変数を選択する

# MOM ヒューリスティクス

---

1. **Maximum Occurrence** in clauses of **Minimum** length

2. 各変数  $x$  に対して, 2つのデータを管理

- $pc(x)$  :  $x$  が**正**で出現する**2つ組み節**の個数

- $nc(x)$  :  $x$  が**負**で出現する**2つ組み節**の個数

3.  $nc$  と  $pc$  とを組み合わせて変数をスコアつける

例 :

- $score(x) = pc(x) \times nc(x) \times 1024 + pc(x) + nc(x) + 1$

# 単一節伝播ヒューリスティクス

## 1. 各変数 $x$ に対して,

- $upT(x)$  :  $x$  に *true* を割り当てた結果生ずる単一節伝播の実際の個数.
- $upF(x)$  :  $x$  に *false* を割り当てた結果生ずる単一節伝播の実際の個数.

## 2. $upT$ と $upF$ とを組み合わせて変数をスコアつける

例 :

- $score(x) = upT(x) \times upF(x) \times 1024 + upT(x) + upF(x) + 1$

## 組み合わせたヒューリスティクス

---

1. MOM ヒューリスティクスを用いて, 変数に順序つける.
2. 上位  $k$  位までの変数に対して, 単一節伝播ヒューリスティクスを適用.
3. [Chu Min Li & Anbulagan, IJCAI-97]

Heuristics Based on Unit Propagation for Satisfiability Problems, pp.366–371

- **CNF** (Conjunctive Normal Form, 和積標準形)

<http://winnie.kuis.kyoto-u.ac.jp/~okuno/Lecture/AI/satformat.tex>

- **DIMACS** 問題集の中身

<http://winnie.kuis.kyoto-u.ac.jp/~okuno/Lecture/AI/contents.tex>

## 課題 1

# Davis-Putnum 法の変数選択ヒューリスティクス

1. 3つのヒューリスティクスを詳細設計し, 比較評価を行う.
2. 難しい random 3-SAT (節 / 変数 比が 4.25 ~ 4.3) で評価. 同じ変数の個数に対して 100 題解くこと.  
論理式の表現方法は DIMACS の CNF 法に従うこと.
3. 評価方法 1 : 10 分間で解ける問題の変数の最大個数は?
4. 評価方法 2 : DIMACS 問題集から最低 10 題解く .  
<ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/sat/benchmarks/cnf/>
5. レポート提出 **5/9 8時45分**.  
アルゴリズム記述, 問題の記述. 実験結果, **評価**を書く .  
グラフや表を使うことは必須 . プログラムは付録に.

## Greedy local search — 手続き GenSAT( $\Sigma$ )

---

```
procedure GenSAT( $\Sigma$ )
  for  $i = 1$  to MAX-TRIES
     $T = \text{initial}(\Sigma)$ 
    for  $j = 1$  to MAX-FLIPS
      if  $T$  satisfies  $\Sigma$  then return  $T$ 
      else  $Poss\text{-}flips = \text{hill-climb}(\Sigma, T)$ 
            $V = \text{pick}(Poss\text{-}flips)$ 
            $T = T$  with  $V$ 's assignment flipped
      endif
    endfor
  endfor
  return "No satisfying assignment found"
end GenSAT
```

# GSAT とは

---

1. *initial* : ランダムに生成した真偽値の割り当て
2. *hill-climb* : その真偽値を変化 (**flip**) させたときに満足する節の数の増分を最大にする変数を返す.
  - そのような増分を変数の**スコア**と呼ぶ.
  - 最大増加が 0 「*sideways moves*」
  - 最大増加が負 「*uphill moves*」
3. *pick* : 変数の一つをランダムに選ぶ.

# GSAT の性能 [Selman AAI-92 表 1]

論理式		GSAT			Davis-Putnum 法		
変数	節	MAX-FLIPS	tries	時間	choices	深さ	時間
50	215	250	6.4	0.4s	77	11	1.4s
70	301	350	11.4	0.9s	42	15	15s
100	430	500	42.5	6s	$8.4 \times 10^3$	19	2.8m
120	516	600	81.6	14s	$0.5 \times 10^6$	22	18m
140	602	700	52.6	14s	$2.2 \times 10^6$	27	4.7h
150	645	1500	100.5	45s	—	—	—
200	860	2000	248.5	2.8m	—	—	—
250	1062	2500	268.6	4.1m	—	—	—
300	1275	6000	231.8	12m	—	—	—
400	1700	8000	440.9	34m	—	—	—
500	2150	10000	995.8	1.6h	—	—	—

難しい random 3-SAT (節 / 変数 比が 4.25 ~ 4.3)

「人工知能特論」, 京都大学大学院情報学研究科知能情報学専攻, Apr. 25, 2000 Lecture 2-10

## Sideways Moves [Selman AAAI-92, 表 4]

問題	no sideway moves			all moves		
	%-solved	tries	時間	%-solved	tries	時間
1	69%	537	10s	100%	6	1.4s
2	39%	63,382	15m	100%	81	2.8m
3	100%	50,000	30h	100%	1	2.5s

問題	タイプ	変数の数	節の数	MAX-TRIES
1	random	50	215	1000
2	random	100	430	100,000
3	30-queens	900	43240	100,000

# GSAT の変種

---

## 1. hill-climbing 技法 [Gent and Walsh 1993]

充足節の数に関する hill-climbing

flip による局所探索

GSAT  $\equiv$  a greedy random hill-climbing

2. GSAT で greediness は重要か

3. GSAT で randomness は重要か

- 選択すべき変数を選ぶ時
- 毎回の試行での初期割当

4. 記憶 (memory) は役立つか

$\implies$  2 ~ 4 を GenSAT の変種を構築し, 検証

# Greediness

---

- 変数選択での greediness

- **TSAT** :

- 1. スコアを**最小**に増加させる変数を返す

- 2. スコアを増加させる変数がない時には, **sideways moves** をすべて返す

- 3. **sideways moves** がない時には**全 moves** を返す

- **TSAT** の性能は **GSAT** と同等.

- *hill-climbing* は**重要**

- 初期割当での greediness

- 影響なし

# Randomness

---

- 変数選択での randomness
  1. **DSAT**: 同程度によい変数の選択 — 決定的かつ公平に循環的に変数を選択していく
  2. DSAT の性能は GSAT よりもよい.
  3. ただし, 公平さが課題
- 初期割当での randomness
  1. **VSAT**: 初期割当を決定的に行うが, 後続の試行では偏差を最大に. e.g., 全部 0  $\Rightarrow$  全部 1  $\Rightarrow$  半分 0  $\Rightarrow$  ...
  2. VSAT の性能は GSAT と同程度
  3. ただし, 後続の試行での偏差が課題

## 記憶 (Memory), Max-flips 対 Max-tries

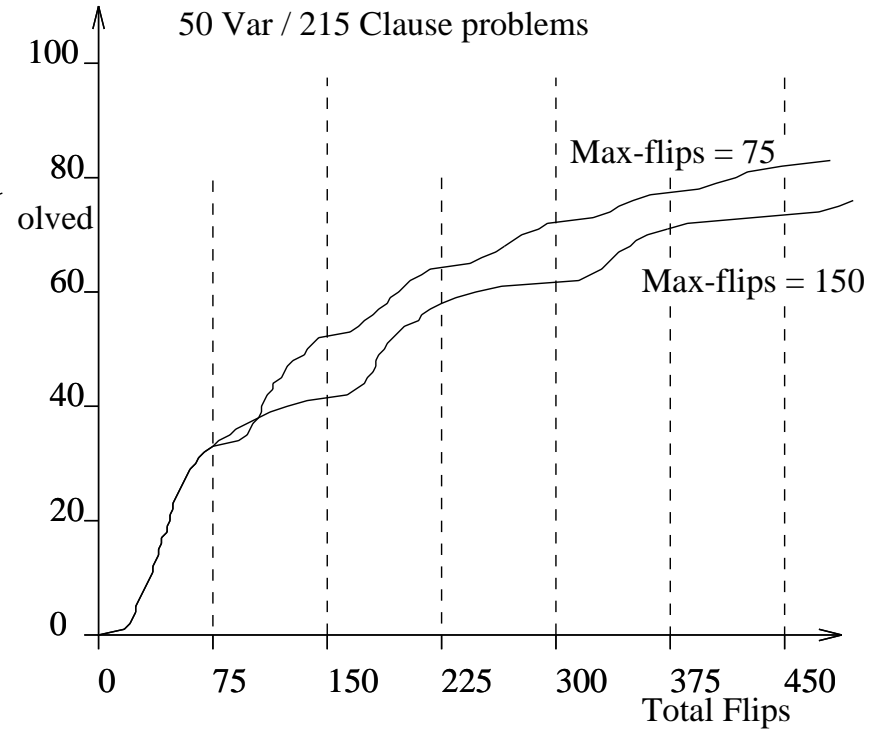
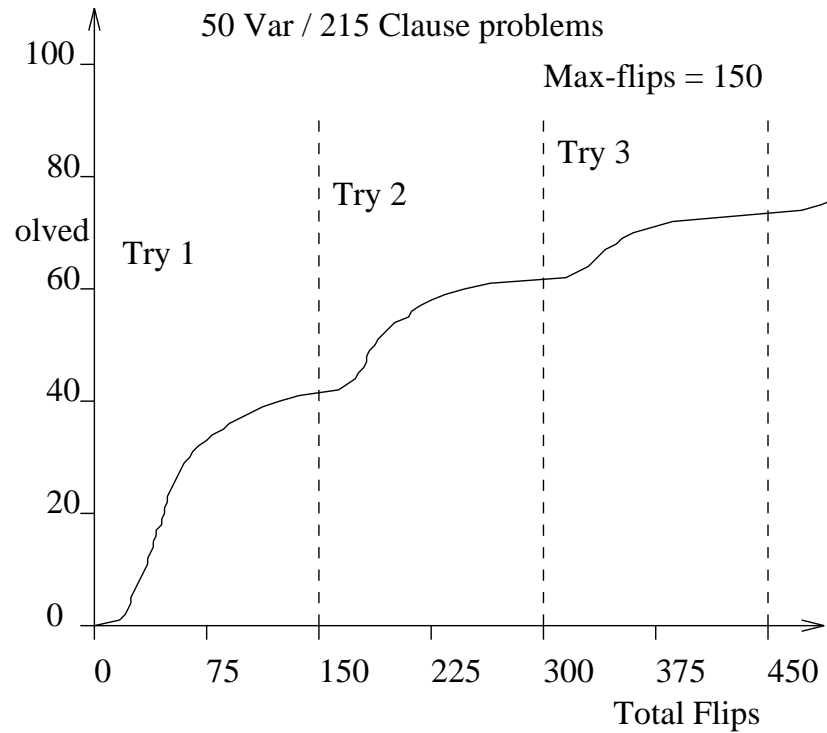
---

1. **HSAT**: 同じ試行で flip されたことのある変数のうち**最も古いもの**を取り上げる
2. HSAT の性能は GSAT や DSAT よりもずっといい.

### Max-flips 対 Max-tries

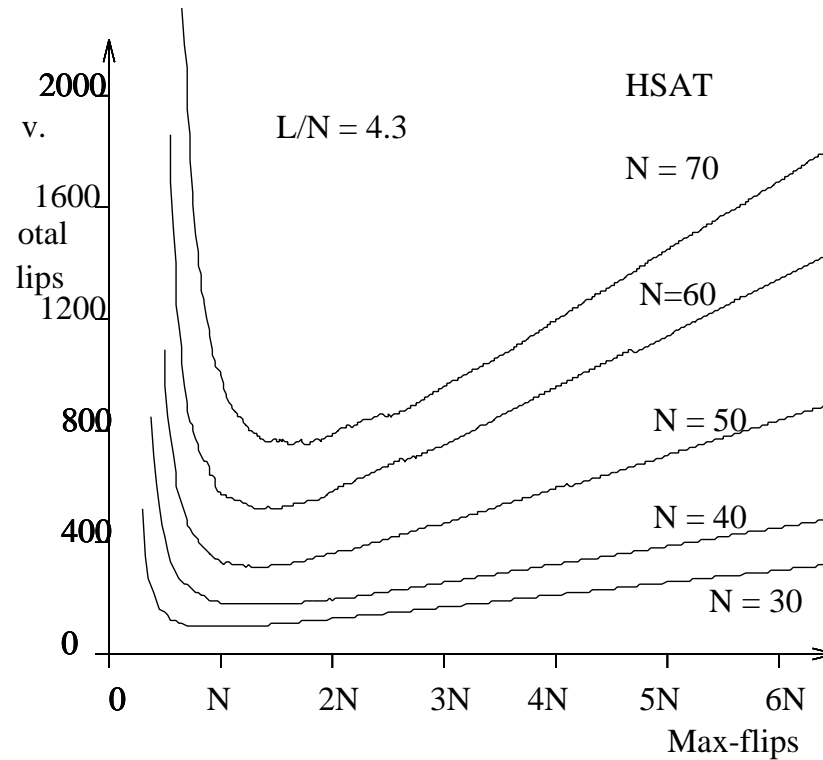
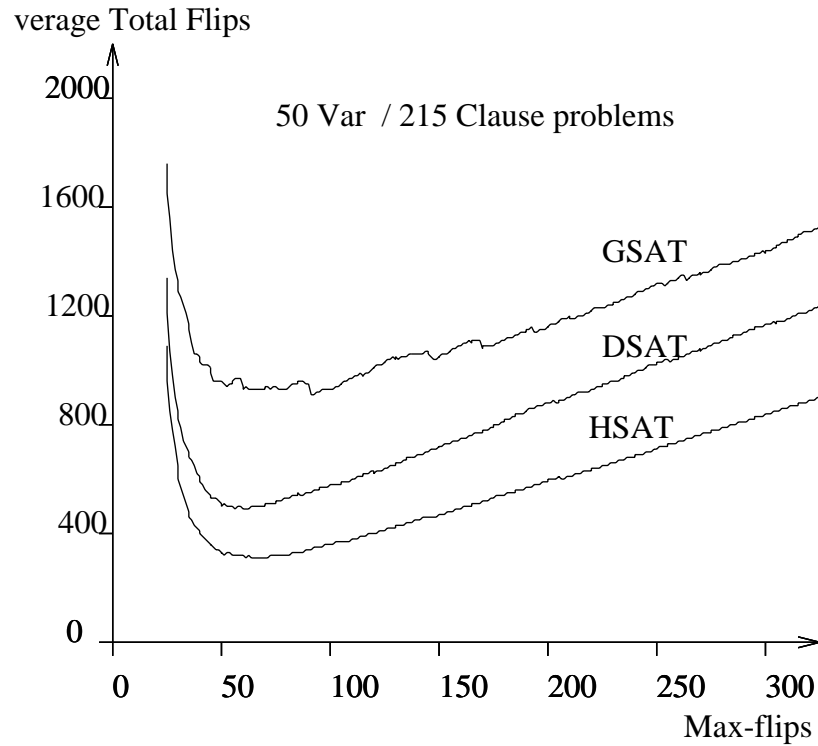
- Max-flips 大  $\implies$  1 回の試行で解ける確率 増加  
 $\implies$  単位時間内に解ける確率 低下
- random 3-SAT ( $N$  変数)  
0.25 $N$  flips で 充足節の割合 : 87.5% ( $\frac{7}{8}$ ) から 97% へ

# Max-flips 対 Max-tries : 正解率と flip の全回数



[Gent and Walsh, AAI-93]

# Max-flips 対 Max-tries : Max-flips の最適値



[Gent and Walsh, AAAI-93]

## Random Walk を用いた GSAT

1. 確率  $p$ , 充足されていない節の一つに現れる変数を取り上げ, その真偽値を flip
2. 確率  $1 - p$ , **GSAT** の標準手続きに従う.  
i.e., もっともよい局所的な変更を行う .

### Noise strategy

1. 確率  $p$ , 任意の変数を取り上げ, その真偽値を flip
2. 確率  $1 - p$ , **GSAT** の標準手続きに従う.  
i.e., もっともよい局所的な変更を行う .

# 雑音のある戦略の比較 [Selman, Kautz, and Cohen 1994]

式	basic GSAT			GSAT with random walk			GSAT with noise		
	時間	flips	R	時間	flips	R	時間	flips	R
1	.4	7554	8.3	.2	2385	1.0	.6	9975	4.0
2	22	284693	143	4	27654	1.0	47	396534	6.7
3	122	$2.6 \times 10^6$	67	7	59744	1.1	95	892048	6.3
4	1471	$30 \times 10^6$	500	35	241651	1.0	929	$7.8 \times 10^6$	20
5	*	*	*	286	$1.8 \times 10^6$	1.1	*	*	*
6	*	*	*	1095	$5.8 \times 10^6$	1.2	*	*	*
7	*	*	*	3255	$23 \times 10^6$	1.1	*	*	*

R : Restart の回数, \* : 10 時間 / 1000restart で解求まらず

論理式	1	2	3	4	5	6	7
変数の個数	100	200	400	600	800	1000	2000
節の個数	430	860	1700	2550	3400	4250	8480

Comparing noise strategies on hard random 3CNF instances.

# WalkSAT

- *initial* : GSAT と同じ. ランダムな割り当て
- *hill-climb* :
  - 充足不能節を取り上げる
  - 確率  $p$  で, **break count** を最小にする変数を返す  
**break count** : flip で充足不能となる節の数
  - 確率  $1 - p$  で, 節中のすべての変数を返す
- *pick* : GSAT と同じ. ランダムに選ぶ
- $p$  の調整が重要. 0.5 でもうまく行くことが多い.
- *Max-Flips* は通常  $O(N^2)$ , *Max-tries* は通常 10 ~ 20

## 課題 2

## GSAT の性能

1. GSAT を設計.
2. GSAT の変種 — HSAT, GSAT with random walk, WalkSAT — を比較・評価
3. 難しい random 3-SAT (節 / 変数 比が 4.25 ~ 4.3) で評価. 同じ変数の個数に対して 100 題解くこと.
4. 評価方法 1 : 10 分間で解ける問題の変数の最大個数は?
5. 評価方法 2 : DIMACS 問題集から最低 10 題解く .
6. レポート提出 **5/23 8 時 45 分**.  
アルゴリズム記述, 問題の記述. 実験結果, **評価**を書く .  
グラフや表を使うことは必須 . プログラムは付録に.