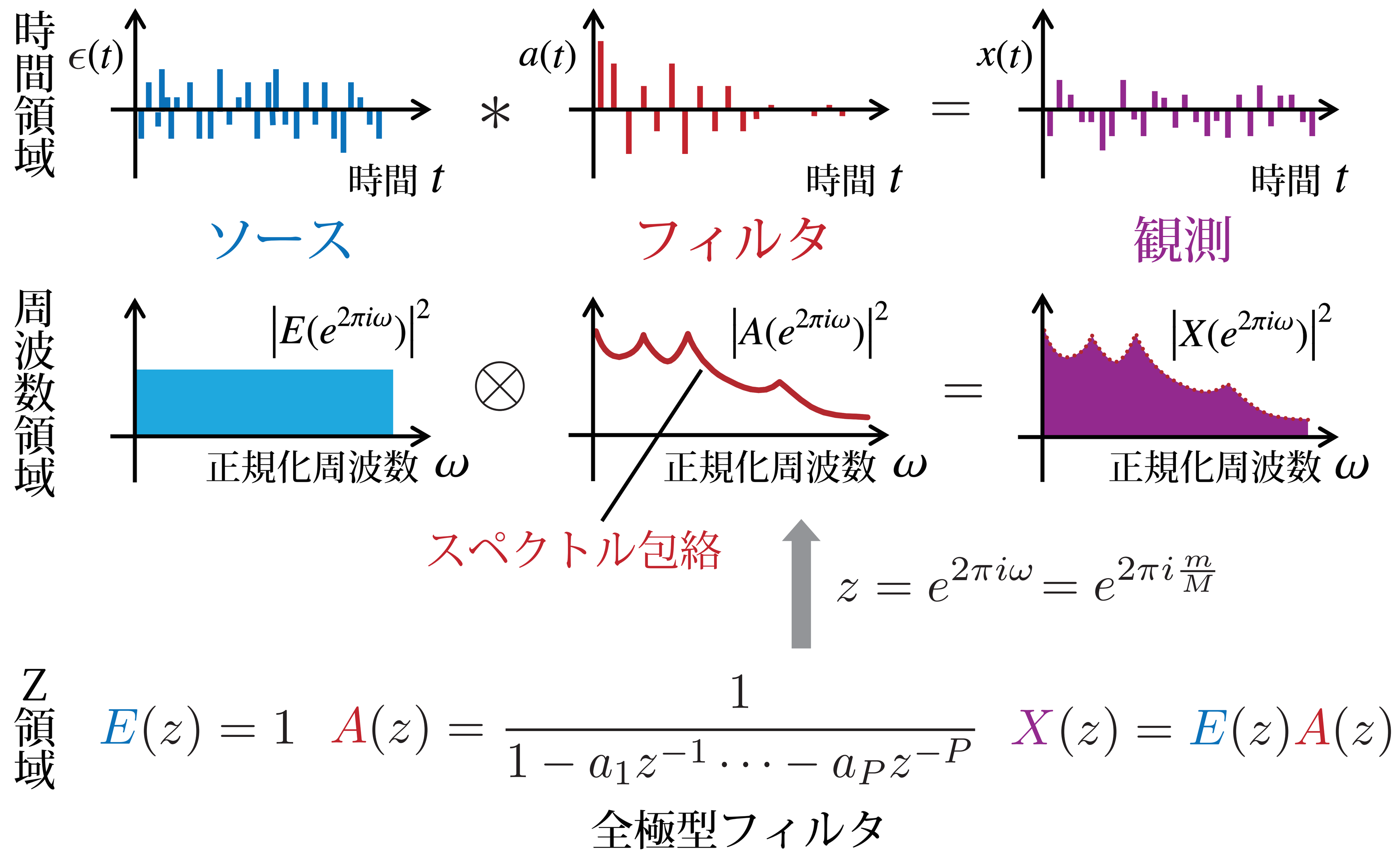
スペクトル包絡と基本周波数の同時推定のための無限カーネル線形予測分析法

吉井 和佳　後藤 真孝（産業技術総合研究所）

目的：観測信号に対して正確なスペクトル包絡を推定したい

線形予測分析 (Linear Prediction: LP)：観測信号が自己回帰過程に従うと仮定する確率モデル



$$x_m = \sum_{p=1}^{P} a_p x_{m-p} + \epsilon_m \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}$$

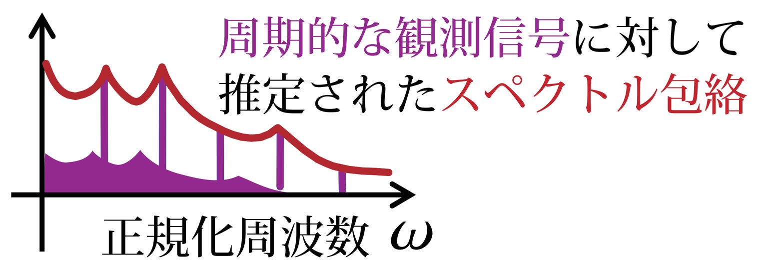
$$\underbrace{\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_M)^T}_{\text{音源信号}} \quad \underbrace{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_P)^T}_{\text{フィルタ係数}} \quad \underbrace{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_M)^T}_{\text{観測信号}}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a_1 & \ddots & & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -a_P & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \ddots & -a_P & \cdots\ -a_1 & 1 \end{bmatrix}_{M\times M} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{M-1} & \cdots & x_{M-P} \end{bmatrix}_{M\times P}$$

音源信号がガウス性白色雑音 $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \nu\boldsymbol{I})$ であると仮定すると
観測信号はガウス分布 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(0, \nu\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-T})$ に従う

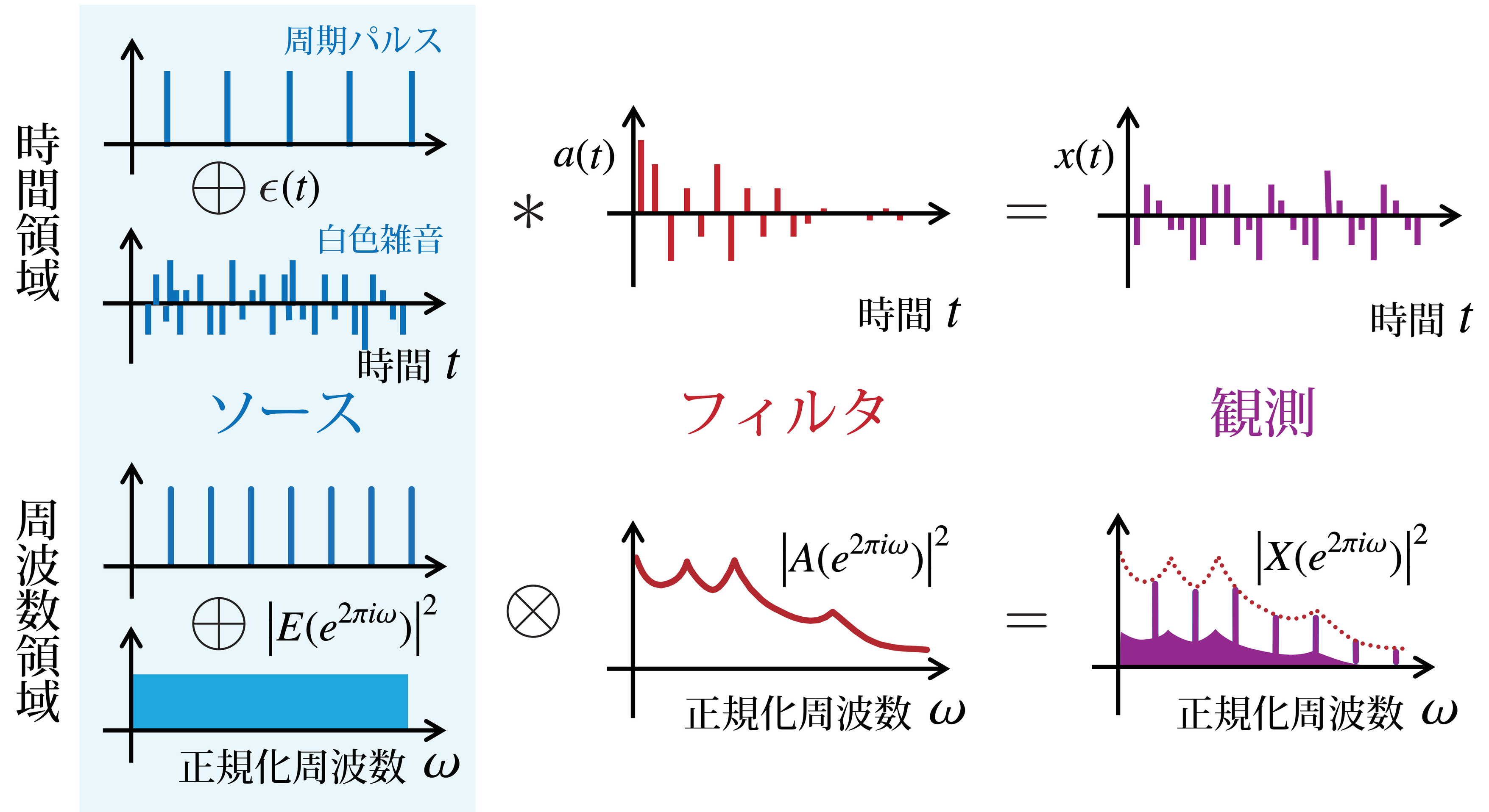
最尤なフィルタ係数は正規方程式 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x}$ の解

問題：観測信号が周期性をもつ場合には音源信号の白色性の仮定から大きく逸脱
推定されたスペクトル包絡には調波構造に引きずられて不必要に急峻なピークが存在



アプローチ：観測信号の基本周波数とスペクトル包絡を同時に推定する

無限カーネル線形予測分析 (IKLP)：音源信号の周期性を無限個のカーネルの凸結合で表現する確率モデル



従来法：マルチカーネル線形予測分析 (MKLP) [亀岡2010]

音源信号をガウス過程回帰を用いて精緻にモデル化

$$\epsilon(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} w_j \phi_j(t)}_{\text{基底関数の線形和}} + \underbrace{\eta(t)}_{\text{白色雑音}} = \boldsymbol{\phi}(t)^T\boldsymbol{w} + \eta(t) \;\xrightarrow{\text{M個の観測点}}\; \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Phi}_{M\times J}\boldsymbol{w}_{J\times 1} + \boldsymbol{\eta}$$

ここで $\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \nu_w\boldsymbol{I})$ かつ $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \nu_e\boldsymbol{I})$ と仮定すると

$$\underbrace{\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \nu_w\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^T + \nu_e\boldsymbol{I})}_{\text{線形回帰モデル}} \;\xrightarrow{\text{カーネル化}}\; \underbrace{\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \nu_w\boldsymbol{K} + \nu_e\boldsymbol{I})}_{\text{ガウス過程回帰モデル}}$$

周期カーネルを使いたいが周期は未知 → マルチカーネル学習

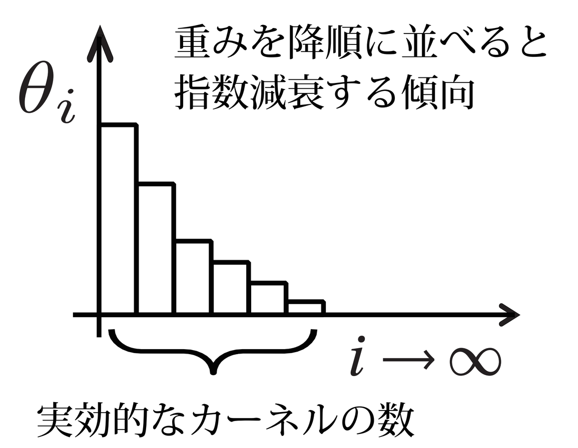
$$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\underbrace{\nu_w\boldsymbol{K}}_{\text{周期成分}} + \underbrace{\nu_e\boldsymbol{I}}_{\text{白色成分}})\boldsymbol{\Psi}^{-T}) \qquad \boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{I}\theta_i\boldsymbol{K}_i$$

従来のLPを特殊な場合として含む　　異なる基本周波数 (周期) に対応する多数の周期カーネルの凸結合

$$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\nu_w\sum_{i=1}^{I\to\infty}\theta_i\boldsymbol{K}_i + \nu_e\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\Psi}^{-T}\right)$$ IKLPの尤度関数！

提案法：ノンパラメトリックベイズによるカーネルの無限化

可算無限個のカーネルの重みに対してガンマ過程事前分布を導入



$$\boldsymbol{\theta} \sim \mathrm{GaP}(\alpha, \mathrm{Uniform})$$

↓ 十分大きな I で打ち切り近似

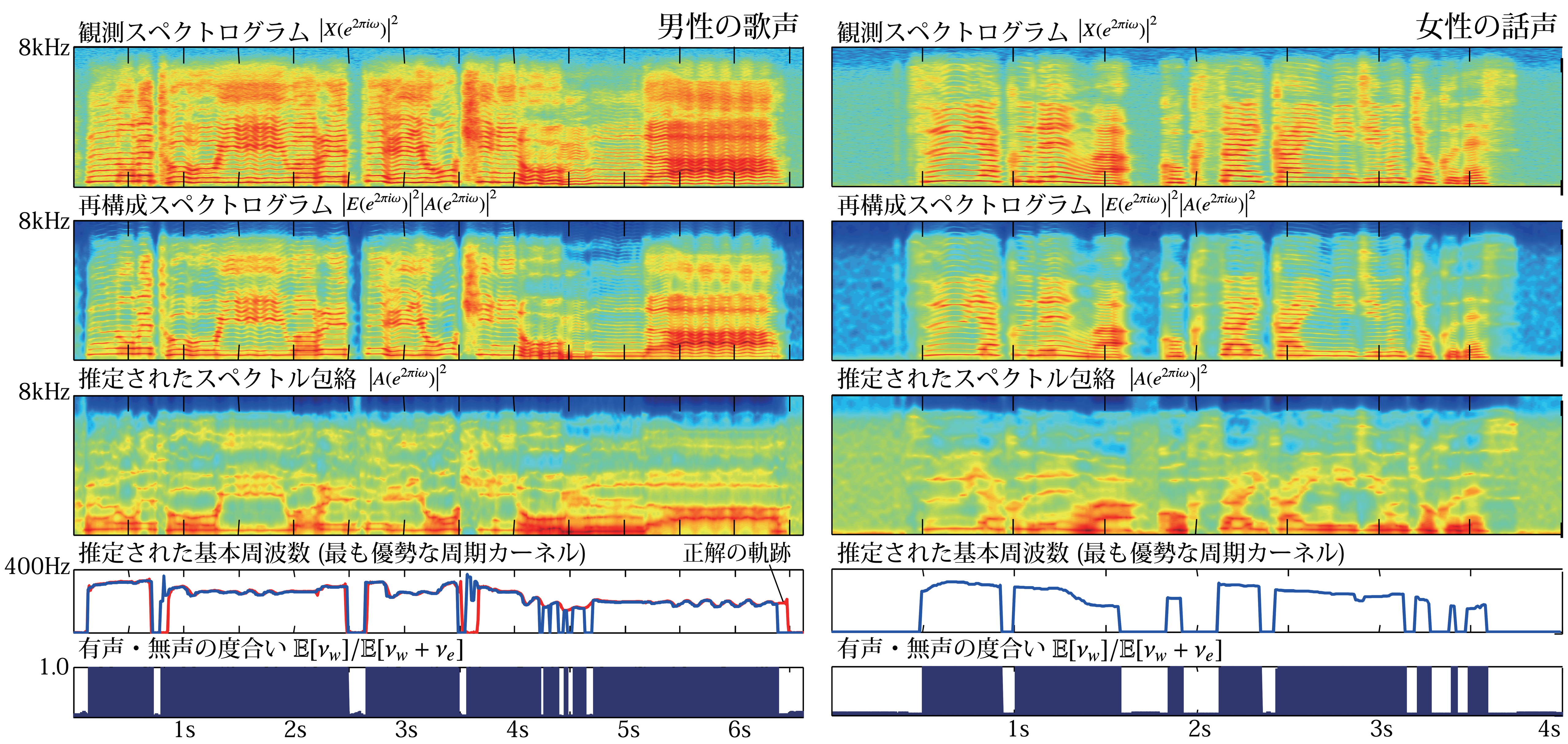
$$\theta_i \sim \mathrm{Gamma}(\alpha/I, \alpha)$$

集中度 α を大きくすればするほど
指数減衰の度合いがゆるやかになる

各パラメータに事前分布を導入してベイズ推定

$$\nu_w \sim \mathrm{Gamma}(a_w, b_w) \quad \nu_e \sim \mathrm{Gamma}(a_e, b_e) \quad \boldsymbol{a} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \lambda\boldsymbol{I})$$

行列関数の凸性・凹性に基づく不等式を用いた変分ベイズ法を導出
マルチカーネル学習のための効率的な最適化アルゴリズムとして利用可能



研究の成果

- 音源信号の特性を無限個のカーネルの凸結合で表現するノンパラベイズモデルを提案
- ガンマ過程に基づくスパースな学習
- 音源信号の周期 (優勢なカーネル) を推定しながらスペクトル包絡の正確な推定を実現

今後の展開

- 未知のカーネル自体を推定したい
  → 半正定値テンソル分解 [吉井2013]
- ソースだけではなくてフィルタも可算無限種類存在することを許容したい
  → 無限複合自己回帰モデル [吉井2012] を時間領域で厳密に再定式化可能